**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

# Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Μεταπτυχιακό ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ

**Διδάσκοντες:** Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

**1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 21/4/2016**

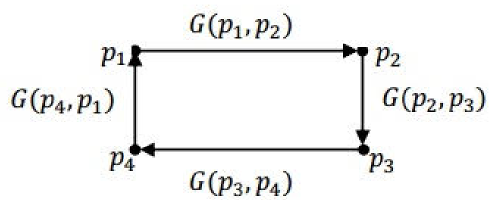
---

**Θέμα 1 (Υπολογισμός Ισορροπίας Nash σε Γραφικά Παίγνια).** (α) Θεωρούμε παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος (2-player zero-sum game) $G(p_1, p_2)$, όπου $p_1$ ο πρώτος και $p_2$ ο δεύτερος παίκτης. Κάθε ένας από αυτούς επιλέγει κρυφά έναν αριθμό από το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, το οποίο αποτελεί και το σύνολο των στρατηγικών του. Στη συνέχεια, οι δύο παίκτες αποκαλύπτουν ταυτόχρονα τους αριθμούς που επέλεξαν και αν το άθροισμά τους $S$ είναι περιττός, τότε ο παίκτης $p_2$ πληρώνει στον παίκτη $p_1$ το ποσό των $S \bmod 6$ ευρώ. Αν το $S$ είναι άρτιος, συμβαίνει το αντίστροφο. Ο πίνακας κέρδους (payoff matrix) του παίκτη $p_1$ είναι συνεπώς:

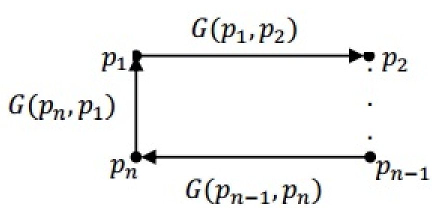
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Βρείτε μία ισορροπία Nash του παιγνίου.

(β) Θεωρήστε το ίδιο παίγνιο με 4 παίκτες σε κύκλο, όπου κάθε παίκτης παίζει με τους γείτονές του και πρέπει να επιλέξει μία στρατηγική την οποία θα ακολουθεί και στα δύο παίγνια στα οποία συμμετέχει. Δηλαδή, το αναμενόμενο κέρδος κάθε παίκτη $p_i$ δίνεται από τη διαφορά $\boldsymbol{x}_i^T A \boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_{i-1}^T A \boldsymbol{x}_i$, όπου $\boldsymbol{x}_i$ η μεικτή στρατηγική του παίκτη $p_i$ (οι δείκτες των παικτών υπολογίζονται modulo 4). Βρείτε μία ισορροπία Nash του παιγνίου.




(γ) Θεωρήστε τη γενίκευση του παραπάνω παιγνίου: Έστω ο πίνακας κέρδους $A$, διαστάσεων $n \times n$, και $n$ παίκτες $p_1, \ldots, p_n$ σε κύκλο. Δείξτε ότι το παίγνιο έχει μία ισορροπία Nash στην οποία το αναμενόμενο κέρδος κάθε παίκτη είναι 0.



(δ) Ισχύει το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος αν οι παίκτες βρίσκονται σε μονοπάτι? Αν ναι, βρείτε την ισορροπία, διαφορετικά βρείτε ένα αντιπαράδειγμα όπου δεν υπάρχει τέτοια ισορροπία.

**Θέμα 2 (Υπολογισμός Ισορροπίας Nash με Συγκεκριμένο Στήριγμα).** Θεωρούμε παίγνιο δύο παικτών $(R, C)$, όπου $R$, $C$ πίνακες $n \times m$, και σύνολα αμιγών στρατηγικών $S_r \subseteq [n]$ και $S_c \subseteq [m]$ για τους δύο παίκτες. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που είτε υπολογίζει μια ισορροπία Nash $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ με στηρίγματα $S(\boldsymbol{x}) = S_r$ και $S(\boldsymbol{y}) = S_c$ είτε αποφαίνεται ότι τέτοια ισορροπία Nash δεν υπάρχει. Υπενθυμίζεται ότι *στήριγμα* (support) $S(\boldsymbol{x})$ μιας μεικτής στρατηγικής $\boldsymbol{x}$ είναι το σύνολο των αμιγών στρατηγικών όπου η $\boldsymbol{x}$ αναθέτει θετική πιθανότητα, δηλ. $S(\boldsymbol{x}) = \{i : x_i > 0\}$.

**Θέμα 3 (Υπολογισμός Σχεδόν Αμιγούς Ισορροπίας Nash).** Θεωρούμε κανονικοποιημένο παίγνιο δύο παικτών $(R, C)$, όπου $R$, $C$ πίνακες $n \times m$ με όλα τα στοιχεία τους στο $[0, 1]$. Μια ισορροπία Nash $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ είναι *$\varepsilon$-προσεγγιστική*, για κάποιο $\varepsilon > 0$, αν για κάθε ζευγάρι στρατηγικών $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

$$\boldsymbol{a}^T R\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^T R\boldsymbol{y} + \varepsilon \quad \text{και} \quad \boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{y} + \varepsilon$$

Ένα ζευγάρι στρατηγικών $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ είναι *σχεδόν αμιγές* (almost pure) αν $|S(\boldsymbol{x})| + |S(\boldsymbol{y})| \in \{2, 3\}$, δηλ. ο ένας από τους δύο παίκτες χρησιμοποιεί μια αμιγή στρατηγική και ο άλλος το πολύ δύο αμιγείς στρατηγικές. Να δείξετε ότι για κάθε κανονικοποιημένο παίγνιο δύο παικτών $(R, C)$, υπάρχει μια $\frac{1}{2}$-προσεγγιστική σχεδόν αμιγής ισορροπία Nash και ότι αυτή μπορεί να υπολογισθεί αποδοτικά.

**Θέμα 4 (Sparsification και Προσεγγιστικές Ισορροπίες Nash).** (α) Έστω $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$, με $\sum_i x_i = 1$ (δηλ. το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n]$). Έστω ακόμη $k(\varepsilon) = \lceil \ln(2)/(2\varepsilon^2) \rceil$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \varepsilon$. Υπενθυμίζεται ότι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ είναι *$k$-ομοιόμορφο* ($k$-uniform) αν κάθε $y_i$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $1/k$.

(β) Έστω $A$ πίνακας $m \times n$ με όλα τα στοιχεία του στο $[0, 1]$ και έστω $\boldsymbol{x}$ ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n]$. Έστω ακόμη $k(m, \varepsilon) = \lceil \ln(2m)/(2\varepsilon^2) \rceil$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(m, \varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $\|A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y}\|_\infty \leq \varepsilon$.

(γ, bonus) Χρησιμοποιώντας το (β), να δείξετε ότι για κάθε κανονικοποιημένο παίγνιο δύο παικτών $(R, C)$, όπου $R$, $C$ πίνακες $n \times n$ με όλα τα στοιχεία τους στο $[0, 1]$, και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια $\varepsilon$-προσεγγιστική ισορροπία Nash $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ όπου τα διανύσματα πιθανοτήτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι $\lceil 12 \ln n/\varepsilon^2 \rceil$-ομοιόμορφα.