Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Μεταπτυχιακό ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 19/5/2016

Θέμα 1 (20 μονάδες). Να υπολογίσετε ένα ακριβές άνω φράγμα στο Τίμημα της Αναρχίας για μη ατομικά παίγνια συμφόρησης με πολυωνυμικές συναρτήσεις καθυστέρησης βαθμού $p \geq 1$ (δηλ. οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι της μορφής $d_e(x) = a_{e,p}x^p + a_{e,p-1}x^{p-1} + \ldots + a_{e,1}x + a_{e,0}$, με $a_{e,p}, a_{e,p-1}, \ldots, a_{e,1}, a_{e,0} \geq 0$). Να δώσετε παράδειγμα παιγνίου για το οποίο το Τίμημα της Αναρχίας είναι ίσο με το άνω φράγμα που υπολογίσατε. Ποιο είναι το Τίμημα της Αναρχίας (και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου β) για $p = 2, 3, 4$;

Θέμα 2 (20 μονάδες). Θεωρούμε ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης με n παίκτες όπου οι στρατηγικές των παικτών αποτελούνται από μία μόνο ακμή[1] και τα σύνολα στρατηγικών μπορεί να διαφέρουν για κάθε παίκτη, δηλ. διαφορετικοί παίκτες i, j μπορεί να επιλέγουν ακμή από διαφορετικά σύνολα E_i, E_j. Έστω E το σύνολο των "παράλληλων" ακμών και έστω $d_e(x)$, $e \in E$, οι συναρτήσεις καθυστέρησης. Να δείξετε ότι μια διαμόρφωση $\sigma = (\sigma_e)_{e \in E}$, όπου σ_e παίκτες επιλέγουν την ακμή e, είναι αμιγής ισορροπία Nash αν και μόνο αν αυτή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση δυναμικού $\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} \sum_{k=1}^{\sigma_e} d_e(k)$.

Θέμα 3 (20+10 μονάδες). Σε ένα (ατομικό) παίγνιο συμφόρησης με παίκτες διαφορετικού βάρους (ή απλά, παίγνιο συμφόρησης με βάρη), κάθε παίκτης $i \in [n]$ έχει βάρος $w_i \in \mathbb{N}^*$. Ο ορισμός των παιγνίων συμφόρησης με βάρη είναι αντίστοιχος με αυτόν των παιγνίων συμφόρησης με παίκτες μοναδιαίου βάρους, με μόνη διαφορά ότι η συμφόρηση σ_e κάθε ακμής e σε μια διαμόρφωση σ είναι ίση με το *συνολικό βάρος* των παικτών που χρησιμοποιούν την e, δηλ., $\sigma_e = \sum_{i: e \in \sigma_i} w_i$. Κατά τα άλλα, η καθυστέρηση σε κάθε ακμή e είναι $d_e(\sigma_e)$ και το ατομικό κόστος κάθε παίκτη i στην σ είναι $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$.

(α) Θεωρούμε ένα παίγνιο συμφόρησης με βάρη σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών όπου όλες οι ακμές έχουν συνάρτηση καθυστέρησης $d(x) = x$. Να δείξετε ότι η $\Phi(\sigma) = \sum_e (\sigma_e)^2$ αποτελεί μια βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού (weighted potential function) για ένα τέτοιο παίγνιο.

(β) Να γενικεύσετε τη βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού του (α) για δίκτυα παράλληλων ακμών όπου κάθε ακμή e έχει μια διαφορετική γραμμική συνάρτηση καθυστέρησης $d_e(x) = a_e x + b_e$, με $a_e, b_e \geq 0$. Για τις 10 μονάδες bonus, να δείξετε ότι η συνάρτηση που βρήκατε αποτελεί βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού για οποιοδήποτε παίγνιο συμφόρησης με βάρη και γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης.

Θέμα 4 (20+10 μονάδες). Ένα παίγνιο σύνδεσης (fair network connection game) ορίζεται σε ένα κατευθυνόμενο δίκτυο $G(V, E)$ με μία διακεκριμένη κορυφή s. Έχουμε n παίκτες, και κάθε παίκτης i πρέπει να συνδέσει μία κορυφή $t_i \in V$ με την s μέσω ενός $t_i - s$ μονοπατιού. Το σύνολο των στρατηγικών κάθε παίκτη i είναι το σύνολο $\mathcal{P}_i$ όλων των $t_i - s$ μονοπατιών στο G. Μια διαμόρφωση σ αποτελείται από ένα $t_i - s$ μονοπάτι σ_i για κάθε παίκτη i. Κάθε ακμή $e \in E$ έχει ένα κόστος $c_e \geq 0$, το οποίο μοιράζονται ισομερώς οι παίκτες που τη χρησιμοποιούν (δηλ. κάθε παίκτης που χρησιμοποιεί την e

[1] Τέτοια παίγνια είναι γνωστά και ως παίγνια εξισορρόπησης φορτίου (load balancing games) ή ως παίγνια παράλληλων ακμών (parallel-link games), αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε παίκτης i χρησιμοποιεί μια ακμή η οποία επιλέγεται από ένα σύνολο παράλληλων ακμών E_i (το οποίο μπορεί να είναι διαφορετικό για κάθε παίκτη).

στη διαμόρφωση σ έχει κόστος c_e/σ_e, όπου $\sigma_e = |\{i : e \in \sigma_i\}|$ είναι το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν την e στην σ). Το ατομικό κόστος $c_i(\sigma)$ κάθε παίκτη i στη διαμόρφωση σ δίνεται από το άθροισμα του κόστους σε όλες τις ακμές στο μονοπάτι του, δηλ. $c_i(\sigma) = \sum_{e\in\sigma_i} c_e/\sigma_e$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση δυναμικού του Rosenthal αποτελεί μια συνάρτηση δυναμικού για τα παίγνια σύνδεσης.

(β) Να δείξετε ότι το Τίμημα της Αναρχίας για ένα παίγνιο σύνδεσης δεν ξεπερνά το n. Να δώσετε παράδειγμα παιγνίου όπου το Τίμημα της Αναρχίας είναι $\Omega(n)$.

(γ) Για τις 10 μονάδες bonus, να δείξετε ότι το Τίμημα της Σταθερότητας για ένα παίγνιο σύνδεσης είναι $\mathrm{O}(\ln n)$. Να δώσετε παράδειγμα παιγνίου όπου το Τίμημα της Σταθερότητας είναι $\Omega(\ln n)$.

Θέμα 5 (20 μονάδες). Μια απλή μέθοδος για τον υπολογισμό μιας αμιγούς ισορροπίας Nash σε ατομικά δικτυακά παίγνια συμφόρησης με συμμετρικά σύνολα στρατηγικών (όπου δηλ. όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια αρχική κορυφή s και τελική κορυφή t) είναι η *αυξητική μέθοδος*: Δεδομένης μιας αρίθμησης των παικτών, οι παίκτες "εισέρχονται στο δίκτυο" με βάση τον αύξοντα αριθμό τους, και επιλέγουν αμετάκλητα τη βέλτιστη στρατηγική τους, δεδομένων των στρατηγικών των προηγουμένων παικτών. Δηλ. κάθε παίκτης $i \geq 1$ "εισέρχεται στο δίκτυο" μετά τους παίκτες $1, \ldots, i-1$, και επιλέγει (αμετάκλητα) το συντομότερο $s-t$ μονοπάτι με βάση τις καθυστερήσεις που διαμορφώνονται από τις στρατηγικές των παικτών $1, \ldots, i-1$ και από τη δική του κυκλοφορία. Αν για κάθε $i = 2, \ldots, n$, οι στρατηγικές των παικτών $1, \ldots, i-1$ παραμένουν βέλτιστες και μετά την "είσοδο" του παίκτη i στο δίκτυο, τότε η αυξητική μέθοδος οδηγεί (μετά την είσοδο και του n-οστού παίκτη) σε μια αμιγή ισορροπία Nash.

(α) Να δώσετε παράδειγμα συμμετρικού δικτυακού παιγνίου συμφόρησης (όπου όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο βάρος και το ίδιο σύνολο στρατηγικών) στο οποίο η αυξητική μέθοδος δεν οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.

(β) Να δείξετε ότι η αυξητική μέθοδος οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash σε δίκτυα παράλληλων ακμών όταν οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών (δηλ. όλες οι διαθέσιμες ακμές είναι επιλέξιμες από όλους τους παίκτες) και διαφορετικά βάρη, και "εισέρχονται στο δίκτυο" σε φθίνουσα σειρά βάρους.